

*Розглянуто питання оцінки проникнення речовин в середовище при реалізації технології видобутку сланцевого газу, вивчено сучасний стан досліджень в даній області. Запропоновано математичну модель процесу дифузії на основі двовимірного рівняння дифузії в декартовій системі координат з урахуванням змінного коефіцієнта дифузії, початкових та граничних умов, які враховують особливості технології видобутку сланцевого газу*

*Ключові слова: сланцевий газ, дифузія, рівняння математичної фізики, стійкість розрахунків, метод прогонки, концентрація*

*Рассмотрены вопросы оценки проникновения веществ в среду при реализации технологии добычи сланцевого газа, изучено современное состояние исследований в данной области. Предложена математическая модель процесса диффузии на основе двухмерного уравнения диффузии в декартовой системе координат с учетом переменного коэффициента диффузии, начальных и граничных условий, которые учитывают особенности технологии добычи сланцевого газа*

*Ключевые слова: сланцевый газ, диффузия, уравнения математической физики, устойчивость расчётов, метод прогонки, концентрация*

УДК 681.518.5:621.643.8

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЙ ВИДОБУТКУ СЛАНЦЕВОГО ГАЗУ

**А. П. Олійник**

Доктор технічних наук, доцент\*

E-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru

**Л. О. Штаєр**

Кандидат технічних наук\*

E-mail: lida.shtayer@gmail.com

**О. І. Клапоущак**

Аспірант\*

E-mail: oksana\_kl@meta.ua

\*Кафедра комп'ютерних технологій в системах управління і автоматики

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

вул. Карпатська 15, м. Івано-Франківськ, Україна, 76019

## 1. Вступ

При вивченні питання про екологічні наслідки реалізації технологій видобутку сланцевого газу важливого значення набуває математичне моделювання процесів, які супроводжують реалізацію таких технологій.

Загальна постановка задачі математичного моделювання процесу видобутку сланцевого газу є досить складною для її реалізації з використанням можливостей ЕОМ, оскільки вона передбачає врахування всіх діючих на процес факторів. Цій проблемі присвячено ряд публікацій [1-7], в яких розглядаються різні аспекти видобутку сланцевого газу та можливих шкідливих наслідків для довкілля, а саме: моделювання процесу гідророзриву пласта в пористому пружному середовищі, процесу поширення хвиль в пористих, пружних насичених середовищах, вивчення особливостей напружено-деформованого стану середовища в зоні видобутку сланцевого газу.

В той же час недостатньо висвітлені питання вивчення дифузійних процесів в середовищах, які безпосередньо прилягають до зони видобутку [8]. Виникає необхідність розробки простих в реалізації та достовірних моделей процесу поширення речовин в середовищі шляхом дифузії, що дозволить створити методику оцінки концентрації тієї чи іншої речовини в досліджуваному середовищі. Актуальність теми – су-

перечливі оцінки пропонованих технологій з точки зору їх впливу на екологію, здоров'я населення, екологічної доцільності – лише підкреслює необхідність теоретичного дослідження даного питання.

## 2. Постановка задачі

Розглядається модельна задача дифузії речовини в двовимірній прямокутній області  $V = \{(x,y); 0 \leq x \leq L_1; 0 \leq y \leq L_2\}$  з урахуванням локального надходження речовини на границі досліджуваної області. Основним рівнянням моделі є рівняння дифузії, яке є двовимірним параболічним рівнянням, що описує нестационарний процес [9]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x,y,t) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(x,y,t) \frac{\partial c}{\partial y} \right), \quad (1)$$

де  $c$  – концентрація речовини;  $a(x,y,t)$  – коефіцієнт дифузії, який залежить від часу  $t$  та просторових координат  $x$  та  $y$ . Рівняння (1) спрощується, якщо  $a(x,y,t) = \text{const} = a^2$ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

Рівняння (1), (2) доповнюються граничними та початковими умовами. Вважається, що в початковий момент часу концентрація речовини, що дифундує, є заданою функцією координати:

$$c(x, y, t)|_{t=0} = c_0(x, y). \quad (3)$$

В найпростішому випадку початкові умови (3) задають стале поле концентрації речовини, проте з точки зору відповідності фізичній картині процесу, умови (3) можуть задавати експериментально визначене поле концентрації речовини. При встановленні граничних умов на області  $V = \{(x, y); 0 \leq x \leq L_1; 0 \leq y \leq L_2\}$  необхідно задати концентрацію речовини на кожній з чотирьох границь області  $V$ :

$$\begin{cases} c|_{x=0} = c_1(y, t); \\ c|_{x=L_1} = c_2(y, t); \\ c|_{y=0} = c_3(x, t); \\ c|_{y=L_2} = c_4(x, t). \end{cases} \quad (4)$$

Моделюючи ситуацію, при якій на границі області наявним є викид речовини в область, умова (4) може бути подана в наступному вигляді:

$$\begin{cases} c|_{x=0} = c_1 = \text{const}; \\ c|_{x=L_1} = c_1 = \text{const}; \\ c|_{y=0} = c_1 = \text{const}; \\ c|_{y=L_2} = c_2 = \begin{cases} c_1, y \in [L_0; L_2] / [y_1; y_2]; \\ \frac{c_3}{kt^2 + 1}, y \in [y_1; y_2]. \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

На відрізку  $[y_1; y_2]$  є наявним викид речовини в область, який є результатом деякої хімічної реакції. Як правило, [10], зміна концентрації речовини в процесі хімічної реакції задається законом Ареніуса, який задається у вигляді диференціального рівняння:

$$w = \frac{dc}{dt} = f(c, T, k, t) \exp\left(-\frac{E}{R_0 T}\right), \quad (6)$$

де  $w$  – швидкість реакції;  $f(c, T, k, t)$  – коефіцієнт, який описує характер хімічної реакції;  $E$  – енергія активації;  $R_0$  – універсальна газова стала;  $T$  – абсолютна температура.

Використання (6) для практичних розрахунків ускладнене тим, що не завжди вдається встановити характер залежності  $f(c, T, k, t)$ , тому використовується модельна залежність:

$$c(t) = \frac{c_3}{kt^2 + 1}. \quad (7)$$

В залежності (7) величина  $c_2$  встановлює максимальну концентрацію речовини, що викидається в область  $V$ ; коефіцієнт  $k$  характеризує швидкість хімічної реакції. За своєю аналітичною структурою права частина (6) та залежність (7) є близькими, проте ви-

користання (7), крім вже вказаних проблем з оцінкою величини  $f(c, T, k, t)$ , є більш ефективним з точки зору реалізації чисельного алгоритму. Величина відрізка  $[y_1; y_2]$  визначається розміром зони проведення вибухових робіт в порівнянні з характерними розмірами  $L_1$  та  $L_2$  області  $V$ .

### 3. Чисельний метод розв'язання

При чисельному розв'язку рівняння (2) з початковими умовами (3) та граничними умовами (4)-(5) використовується метод змінних напрямків [11], який дозволяє записати наступну різницеву схему для рівняння (2):

$$\begin{cases} \frac{\tilde{c}_{k,m} - c_{k,m}^n}{\tau/2} = a^2 \frac{\tilde{c}_{k+1,m} - 2\tilde{c}_{k,m} + \tilde{c}_{k-1,m}}{h_x^2} + a^2 \frac{c_{k+1,m}^n - 2c_{k,m}^n + c_{k-1,m}^n}{h_y^2}, \\ \frac{c_{k,m}^{n+1} - \tilde{c}_{k,m}}{\tau/2} = a^2 \frac{\tilde{c}_{k+1,m} - 2\tilde{c}_{k,m} + \tilde{c}_{k-1,m}}{h_x^2} + a^2 \frac{c_{k+1,m}^{n+1} - 2c_{k,m}^{n+1} + c_{k-1,m}^{n+1}}{h_y^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Схема (8) в першій своїй частині є явною за координатою  $y$  та неявною – за координатою  $x$ , а в другій частині – явною за координатою  $x$  та неявною за координатою  $y$ . Використання спектральної ознаки стійкості для першої групи рівняння (8) дозволяє встановити з урахуванням:

$$U_{k,m}^n = \lambda^n e^{i(k\phi + m\psi)},$$

що

$$\lambda_1 = \frac{1 - \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}, \quad (9)$$

а для другої частини (8):

$$\lambda_2 = \frac{1 - \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}{1 + \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}}. \quad (10)$$

Для загальної стійкості схеми (8) необхідним є виконання умови  $|\lambda^*| = |\lambda_1 \cdot \lambda_2| \leq 1$ , звідки з (9) та (10) одержуємо умову:

$$|\lambda^*| = \left| \frac{1 - \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}{1 + \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right| \leq 1. \quad (11)$$

Оскільки величини  $\tau; h_x; h_y; \sin^2 \frac{\phi}{2}; \sin^2 \frac{\psi}{2}$  в (11) є невід'ємними, то умова (11) завжди виконується, тому схема (8) є стійкою для будь-яких значень параметрів розрахункової сітки, тобто, абсолютно стійкою, що дозволяє при реалізації схеми (8) вибирати її параметри лише з точки зору точності результатів моделювання, а не з умови забезпечення стійкості. Реалізація схеми

(8) проводиться з використанням методу прогонки для двох систем рівнянь:

$$-\frac{\tau a_{k,m}^2}{2h_x^2} \tilde{c}_{k+1,m} + \left(1 + \frac{\tau a_{k,m}^2}{h_x^2}\right) \tilde{c}_{k,m} - \frac{\tau a_{k,m}^2}{2h_x^2} \tilde{c}_{k-1,m} = c_{k,m}^n + \frac{\tau a_{k,m}^2}{2h_y^2} \times$$

$$\times (c_{k,m+1}^n - 2c_{k,m}^n + c_{k,m-1}^n), \quad (12)$$

$$\tilde{c}_{1,m} = c_1; \quad \tilde{c}_{k,m} = c_1; \quad m = 1, \dots, M,$$

де невідомими величинами є  $\tilde{c}_{k,m}$ , та системою:

$$-\frac{\tau a_{k,m}^2}{2h_y^2} c_{k,m-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\tau a_{k,m}^2}{h_y^2}\right) c_{k,m}^{n+1} - \frac{\tau a_{k,m}^2}{2h_y^2} c_{k,m+1}^{n+1} = \tilde{c}_{k,m}^n + \frac{\tau a_{k,m}^2}{2h_x^2} \times$$

$$\times (\tilde{c}_{k+1,m} - 2\tilde{c}_{k,m} + \tilde{c}_{k-1,m}), \quad (13)$$

$$\tilde{c}_{k,1}^{n+1} = c_1; \quad \tilde{c}_{k,M}^{n+1} = c_2; \quad k = 1, \dots, K,$$

де невідомими величинами є  $c_{k,m}^{n+1}$ . Вибір в (12), (13) величин  $a_{m,n}$  дозволяє моделювати дифузійне поширення речовини в матеріалі з різними коефіцієнтами дифузії. Оскільки при знаходженні розв'язку системи (12), (13) використовується три масиви даних  $c_{k,m}^n$ ,  $\tilde{c}_{k,m}$  та  $c_{k,m}^{n+1}$ , в початковий момент часу та на границі області  $V$  їх значення визначаються залежностями (5).

Розв'язок систем (12) та (13) проводиться з використанням методу прогонки для розрахункової сітки, яка наведена на рис. 1.

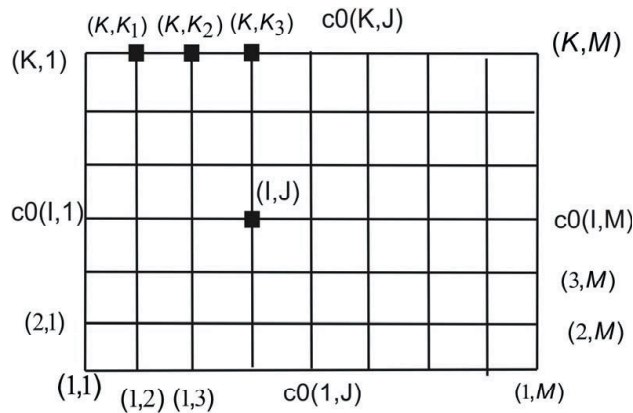


Рис. 1. Розрахункова схема для рівняння (2)

В точках  $(K,K_1)$ ,  $(K,K_2)$ ,  $(K,K_3)$  проводиться викид речовини, в деяких точках  $(I,J)$  можна задавати різні значення коефіцієнта дифузії. Розрахункова схема методу прогонки є стійкою через діагональне переважання матриць систем (12) та (13).

#### 4. Розрахунки для тестової задачі та їх аналіз

Розрахункова схема задачі реалізована як програма для ПЕОМ, для проведення розрахунків вибирались наступні параметри розрахункової схеми:  $M=30$ ,  $K=30$ ,  $L_1=3,0$ ,  $L_2=3,0$ ,  $C_1=0,1$ ,  $a^2=0,3$ ,  $C_2=0,9$ ,  $K=0,001$ ,  $\tau=0,1$ ,  $h_x=0,1$ ,  $h_y=0,1$ . Вказані величини є умовними, проте вони дозволяють проаналізувати відповідність одержаних результатів фізичній картині процесу.

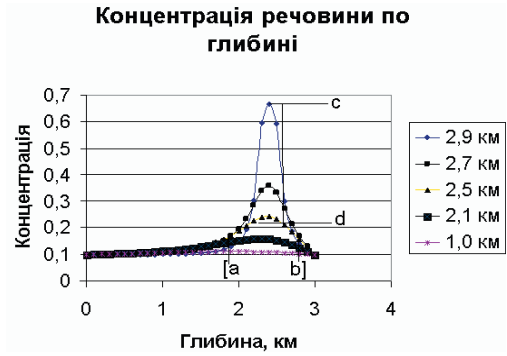


Рис. 2. Розподіл концентрації речовини при викиді на глибині 3 км

Вводячи умовні масштабні множини, за результатами розрахунку можна одержати наступні результати (рис. 2). Згідно з ними, зміна концентрації речовини мало помітна як по глибині, так і ширині області на відстані 0,5 км від центра викиду речовини по ширині області (відрізок  $[a,b]$ ), та на відстані  $\leq 1$  км по глибині області (відрізок  $[c,d]$ ). В запропонованій чисельній схемі передбачено можливість задання різних значень коефіцієнтів дифузії  $c_{k,m}$  по глибині та по ширині області  $V$  – очевидно, що при цьому залежність (11) набуває вигляду:

$$|\lambda^*| = \frac{1 - \frac{2\tau a_{k,m}^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \frac{2\tau c_{k,m}^2}{h_y^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{2\tau a_{k,m}^2}{h_y^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{2\tau a_{k,m}^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (14)$$

і висновок  $|\lambda^*| \leq 1$  залишається справедливим при будь-яких  $\tau$ ;  $h_x$ ;  $h_y$ ;  $\varphi$ ;  $\psi$ ;  $a_{k,m}^2$ . Виникає питання про межі практичного використання пропонованої моделі та її реалізації для реальних процесів. З цією метою проаналізовано рівняння (2) з урахуванням характерних величин процесу:

$$\frac{C}{T} \cdot \frac{\partial c^*}{\partial t^*} = \left[ a^{*2} \frac{\partial^2 c^*}{\partial x^{*2}} + a^{*2} \frac{\partial^2 c^*}{\partial y^{*2}} \right] \cdot \frac{CA^2}{L^2}, \quad (15)$$

де:  $t = Tt^*$ ,  $x = Lx^*$ ,  $y = Ly^*$ ,  $a = Aa^*$ ,  $c = Cc^*$ . В такому випадку одержується:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} = \left[ a^{*2} \frac{\partial^2 c^*}{\partial x^{*2}} + a^{*2} \frac{\partial^2 c^*}{\partial y^{*2}} \right] \cdot \frac{A^2 T}{L^2}. \quad (16)$$

Значення  $A^2$  в (16) має зміст в тому розумінні, що коефіцієнт дифузії – додатна величина, а величини, що позначені символом “\*” є безрозмірними. Фактично значення  $\frac{A^2 T}{L^2}$ , де  $A^2$  – коефіцієнт дифузії,  $T$  – характерний час процесу,  $L$  – характерний розмір області дослідження, задає коефіцієнт  $a_{k,m}$  в (2) і встановлює межі застосування моделі.

На рис. 3 наведено розподіл концентрації речовини по модельній області, виявлено величину зони зміни концентрації в порівнянні з початковою. На рис. 4 наведено розподіл концентрації речовини при аналогічній інтенсивності викиду за умови змінної величини коефіцієнта дифузії – при цьому величина зони зміни концентрації суттєво зменшується. Розроблена математична модель дозволяє проводити розрахунки для

випадку, коли коефіцієнт дифузії є змінним по всій області, тобто моделювати різну геологічну структуру досліджуваної області.

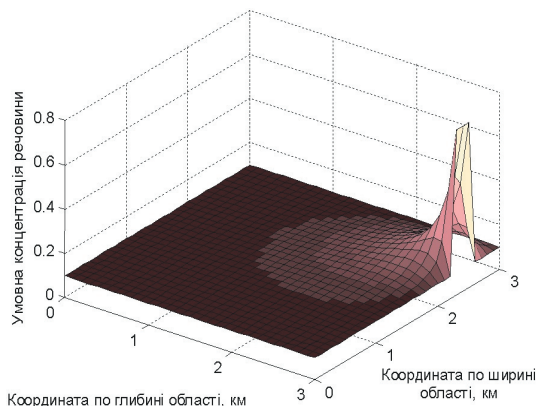


Рис. 3. Розподіл концентрації речовини по умовній області при точковому її викиді

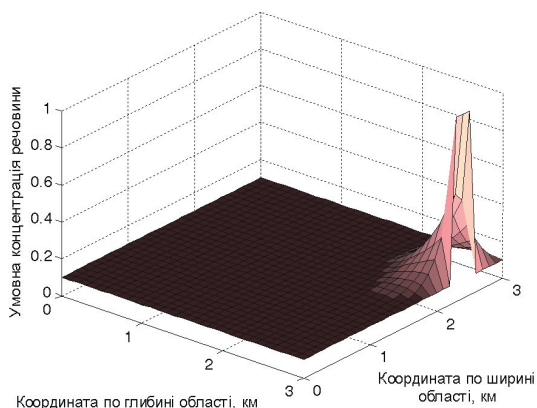


Рис. 4. Розподіл концентрації речовини по умовній області при точковому її викиді при змінному коефіцієнті дифузії в області

На рис. 5 наведено розподіл концентрації речовини в околі максимального викиду речовини в різні моменти часу, що дозволяє визначити моменти часу, в які концентрація речовини може виходити на задані допустимі рівні.

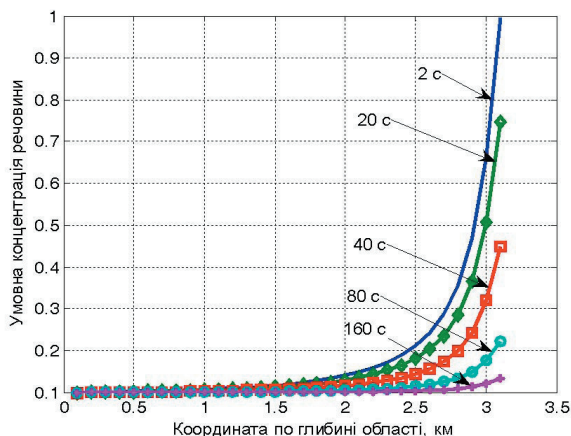


Рис. 5. Зміна концентрації речовини в зоні максимального викиду з часом

## 5. Висновки

За результатами проведеного моделювання розрахунків можна зробити наступні висновки:

- модель (1)-(5) дозволяє моделювати розподіл концентрації речовини в деякій області за умови наявності локального викиду речовини;

- розрахункова схема для розрахунку за моделлю (1)-(5) є абсолютно стійкою, що дозволяє проводити розрахунки при різних параметрах розрахункової сітки керуючись міркуваннями точності, а не стійкості схеми;

- прийнята в залежності (5) схема апроксимації граничних умов дозволяє одержати фізично адекватні результати, а аналітична структура (7) функції моделювання граничних умов дозволяє моделювати як різні амплітуди викидів (коефіцієнт  $c_2$ ), так і різну тривалість процесу викиду (коефіцієнт  $K$ );

- проведені тестові розрахунки відповідають реальній фізичній картині процесу.

Для подальшої практичної реалізації методики необхідно визначити напрями досліджень, серед яких можуть бути наступні:

- визначення характерного часу процесу дифузії, який може бути пов'язаним з

- характерним часом процесу розриву пласту;

- визначення характерних розмірів зони впливу процесу видобутку сланцевого газу та її геометричної конфігурації, з точки зору вказаної моделі – визначення параметрів області  $V$ ;

- визначення коефіцієнта дифузії як функції просторових координат з урахуванням складу середовища – замість коефіцієнта  $a(x,y,t)$  можна підрахувати ефективний коефіцієнт дифузії, який визначається для суміші речовин, яка складатиметься з  $N$  компонент [10]:

$$D_{\alpha} = \frac{(1-x_{\alpha})}{\sum_{j=1}^N \frac{x_j}{D_{\alpha j}}}, \quad (17)$$

де  $x_{\alpha}$ ;  $x_j$  – молярні долі дифундуючої речовини та  $j$ -ої компоненти комбінованого середовища;  $D_{\alpha j}$  – коефіцієнт бінарної дифузії компонента  $\alpha$  в середовищі  $j$ . Подання (17) дозволяє враховувати найскладніший з точки зору математичного опису характер процесу, більш простим випадком задання коефіцієнта дифузії є залежність:

$$a(x,y,t) = \sum \lambda_i a_i(x,y,t), \quad (18)$$

де  $\lambda_i$  – концентрація  $i$ -тої речовини в рідині, що дифундує;  $a(x,y,t)$  – коефіцієнт дифузії цієї речовини.

## Література

1. Гарилов, Т. Г. Моделирование процесса гидроразрыва пласта в пороудупругой среде [Текст] / Т. Г. Гарилов // Математическое моделирование. – 2006. – Т.18, №6. – С. 53-69.
2. Городецкая, Н. С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах [Текст] / Н. С. Городецкая // Акустический весник. – 2007. – Т.10, №2. – С. 46-63.



3. Карев, В. М. Механика гидрогазоимпульсного воздействия на трещиновато-пористую породу при скважинной гидродобыче [Текст] / В. И. Карев, Ю. Ф. Коваленко, В. Н. Одинцев // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1995. – №6. – С. 70-83.
4. Пучков, Л. А. Извлечение метана из угольных пластов [Текст] / Л. А. Пучков. – М: Из-во МГТУ. – 2002. – 383 с.
5. Фізико-хімічна геотехнологія: навч. посібник [Текст] / М. М. Табаченко, О. Б. Владико, О. Є. Хоменко, Д. В. Мальцев. – Д.: Національний гірничий університет, 2012. – 310 с.
6. Boger, C. Production gas from its source. Oilfield Review [Текст] / Boger C., Kieschnick I., Lewis R. E. Waters G. – Autumn 2006, – P. 36-49.
7. Zhao, C. Finite element modeling of methane gas / Migration in coal seams [Текст] / C. Zhao, S. Villiappan // Computers and structures. – 1995. – V.55, №4. – P. 625-629.
8. Rice, J. R. Some basic stress-diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents [Текст] / J. R. Rice, M. P. Cleary // Reviews of Geophysics and Space Physics. – 1992. – №14. – P. 227-241.
9. Задачі термодифузії та методи їх розв'язку [Текст] / під ред. д.т.н. В. П. Ляшенко. – Кременчук: КНУ ім. М. Остроградського, 2012. – 112 с.
10. Булгаков, В. К. Моделирование горения полимерных материалов [Текст] / В. К. Булгаков, В. И. Кодолов, А. М. Липанов. – М: Химия, 1990. – 240 с.
11. Дьяченко, В. Ф. Основные понятия вычислительной математики [Текст] / В. Ф. Дьяченко. – М: Наука, 1977. – 128 с.

**Використання ідей генетичних алгоритмів до побудови математичних моделей дає можливість не тільки вибрати оптимальну за структурою адекватну модель, але й значно зменшити число обчислень при переборі моделей. Тому новий метод може бути застосований для прогнозування, як фізичних явищ, так і складних технологічних процесів. Ефективність розробленого методу підтверджена на приклад побудови моделі зміни рівня води у ріці Дністер у залежності від погодних умов**

**Ключові слова:** синтез математичних моделей, генетичний алгоритм, хромосома, зовнішній критерій, некротні частоти, гармонічний ряд, точність прогнозу

**Использование идей генетических алгоритмов к построению математических моделей дает возможность не только выбрать оптимальную по структуре адекватную модель, но и значительно уменьшить число вычислений при переборе моделей. Поэтому новый метод может быть применен для прогнозирования, как физических явлений, так и сложных технологических процессов. Эффективность разработанного метода подтверждена на примере модели изменения уровня воды в реке Днестр в зависимости от погодных условий**

**Ключевые слова:** синтез математических моделей, генетический алгоритм, хромосома, внешний критерий, некротные частоты, гармонический ряд, точность прогноза

УДК 628.5.66

## МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ РІВНЯ ВОДИ У Р. ДНІСТЕР У ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ПОГОДНИХ УМОВ

**М. І. Горбійчук**

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри

Кафедра «Комп'ютерні системи та мережі»  
Івано-Франківський національний технічний  
університет нафти і газу

вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019  
E-mail: gorb@nung.edu.ua

**М. А. Шуфнарович**

Асистент

Кафедра «Медична інформатика, медична і  
біологічна фізика»

Івано-Франківський національний медичний  
університет

вул. Галицька, 2, м. Івано-Франківськ, 76019  
E-mail: shyfnarovich@gmail.com

### 1. Вступ

Газотранспортна мережа України включає близько 35 тис. км газопроводів, 71 компресорну станцію за-

гальною потужністю 5,4 млн. кВт. Важливою складовою газотранспортної мережі України є управління магістральних газопроводів "Прикарпаттрансгаз", яке в своєму складі має 18 компресорних станцій загаль-